LA 1 Repetitorium Day 2

Berk Oytun Bozoğlu

Exercise 1

Sei V ein k-Vektorraum und $p \in \mathrm{End}_k(V)$ eine Projektion, d.h. $p^2 = p$. Zeigen Sie:

(a) $V = \ker(p) \oplus \mathrm{im}(p)$.

(b) $q = \mathrm{id}_V - p$ ist ebenfalls eine Projektion.

(c) $\ker(q) = \mathrm{im}(p)$ und $\mathrm{im}(q) = \ker(p)$.

(d) $q \circ p = 0 = p \circ q$.

(e) Ist $V = U \oplus W$, so gibt es eine Projektion $r\colon V \to V$ mit $\ker(r) = U$ und $\mathrm{im}(r) = W$.

Exercise 2

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(k)$ für einen Körper k. Dann ist die Spur ,$\mathrm{tr}(A)$, der Matrix A definiert als $\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

(a) Zeigen Sie daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathrm{Mat}_n(k) &\to k \\ A &\mapsto \mathrm{tr}(A) \end{aligned}$$

eine k-lineare Abbildung ist

(b) Im Fall daß $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ $A = A^T$ und $A^2 = 0$ gilt $A = 0$

(c) Gilt $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$ für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_n(k)$?

(d) Zeigen Sie daß es keine Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(k)$ gibt die $AB - BA = E_n$ erfüllen.

(e) Zeigen Sie daß der Vektorraum $\{A \in \mathrm{Mat}_n(k)\colon \mathrm{tr}(A) = 0\}$ Dimension $n^2 - 1$ hat.

Exercise 3

Sei k ein Körper und V ein endlich dimensionaler k-vektorraum, $n = \dim_k(V)$. Sei $f \in \mathrm{End}_k(V)$ mit $\mathrm{rg}(f) = 1$ und $\mathrm{rg}(f^2) = 0$. Zeigen Sie:

Es existiert eine Basis B von V so daß die Matrix ${}_B(f)_B = \mathscr{M}_B^B(f) = (a_{ij})_{i,j}$ bis auf den Eintrag $a_{1n} = 1$ nur aus Nulleinträgen besteht.

Exercise 4

Betrachte die $\mathbb{Q}$ lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Q}^2 &\to \mathbb{Q}^2 \\ v &\mapsto \begin{pmatrix} v_1 + 4v_2 \\ -v_1 + 5v_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix ${}_B(f)_B$ von f bezüglich der Basis

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercise 5

Sei k ein Körper und V ein k-Vektorraum. Sei $f \in \mathrm{End}_k(V)$. Zeige: Ist $f^2 = 0 \in \mathrm{End}_k(V)$, so gilt $\dim_k(\ker(f)) \geq \frac{1}{2}\dim_k(V)$.

Exercise 6

Sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(k)$. Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 7

Beweisen Sie für alle $n, k \in \mathbb{N}$, $X \in \mathrm{Mat}_n(k)$, $A \in \mathrm{GL}_n(k)$ gilt dier Identität:

$$(AXA^{-1})^k = AX^kA^{-1}$$

Exercise 8

Seien V und W endlich dimensionale Vektorräume und $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^*)$.

(b) f injektiv $\implies$ f^* surjektiv

(c) f surjektiv $\implies$ f^* injektiv

(d) $f^* = 0 \implies f = 0$