LA 1 Repetitorium Day 3

Berk Oytun Bozoğlu

Exercise 1

Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

(a) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Ist die Matrix invertierbar ?

(c) Zeigen Sie, daß es keine Matrix $X \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ gibt mit $A^2X = E_3$

(d) Gibt es einen Vektor $b \in \mathbb{R}^3$, so daß das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x \in \mathbb{R}^3$ genau eine Lösung besitzt

Exercise 2

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

(a) Bestimme eine Basis von $\ker(M)$ und vervollständige dies zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$

(b) Bestimme einen Basis von $\mathrm{im}(M)$

(c) Bestimme alle Reellen Lösungen von

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercise 4

Zeigen Sie daß für einen k-Vektorraum V die folgende lineare Abbildung $V \to V^{**}$, $v \mapsto \varphi(v)$ mit $\varphi \in V^*$ injektiv ist. Falls V endlich dimensional ist, gilt $V \cong V^{**}$.

Exercise 5

Betrachte den $\mathbb{R}$ Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis B, sowie der Basis

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Betrachte den $\mathbb{R}$ Vektorraum $W = \mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis C, sowie der Basis

$$C' = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Geben Sie die Basiswechsel Matrix für den Wechsel von B nach B' und von C nach C' an.
2. Geben Sie die Basiswechsel Matrix für den Wechsel von C' nach C an.
3. Die Lineare Abbildung $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basen B und C durch die Matrix

   $$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   gegeben. Berechnen Sie mittels Basistransformation die Matrix ${}_{C'}(f)_{B'}$.

Exercise 6

Sei $f\colon \operatorname{Mat}_2(k) \to \operatorname{Mat}_2(k)$ gegeben durch $f(X) = AX - XA$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie daß f in $\operatorname{End}_k(\operatorname{Mat}_2(k))$ ist.

(b) Zeigen Sie daß die Familie $B = \{E_{ij} \colon 1 \leq i, j \leq 2\}$ der Matrizen die eine Eins bei (i, j) und nullen sonst haben eine Basis von $\operatorname{Mat}_2(k)$ bildet.

(c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix ${}_B(f)_B$

Exercise 7

Bestimme eine Basis des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung $f_A \colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4$ Wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{4\times 3}(\mathbb{Q})$$

Exercise 8

Sei $f \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ die $\mathbb{C}$ lineare Abbildung die (x_1, x_2, x_3) auf $(2x_1 + ix_2, 2ix_1 + x_2 - x_3)$ abbildet. Finden Sie Basen für $\ker f$ und $\operatorname{im} f$.

Exercise 9

Betrachte die k-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon \operatorname{Mat}_2(k) &\to \operatorname{Mat}_2(k) \\ A &\mapsto A^T + \operatorname{tr}(A) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sei $B = \{E_{ij}\colon 1 \leq i, j \leq 2\}$ eine Basis von $\operatorname{Mat}_2(k)$ bestehen aus den Matrizen die eine Eins bei (i, j) und nullen sonst haben. Finden Sie die darstellende Matrix von φ bezüglich dieser Basis.