LA 1 Repetitorium Day 4

Berk Oytun Bozoğlu

Exercise 1

Bestimmen Sie für die Permutationen

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{sgn}(\pi_1)$ und $\operatorname{sgn}(\pi_2)$.

Exercise 2

Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

1. $$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & x & 0 \\ -x & 0 & x \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 3

Geben Sie eine Formel für die Determinante der folgenden Matrix A mit $a \in k$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 4

Beweisen oder Wiederlegen Sie jeweils (durch ein Gegenbeispiel) daß die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}$-linear sind

(a) $f_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x + 3y, 2y - x)$

(b) $f_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto \max\{x, y, z\}$

(c) $f_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto det(AB^{-1})$

Wobei $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$

Exercise 5

Sei k ein Körper. Entscheiden Sie für welche Werte $a \in k$ die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Exercise 6

Sei k ein Körper und $n \geq 1$ eine ganze Zahl. Seien $x, a_1, \ldots, a_n \in k$.
Sei

$$A = \begin{pmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n+1}(k)$$

Zeigen Sie daß $\det(A) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$ ist.

Exercise 7

Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(k)$ und $f_A \colon \mathrm{Mat}_n(k) \to \mathrm{Mat}_n(k)$ mit $f_A(X) = AX - XA$. Zeigen Sie:

(a) f_A ist linear für alle $A \in \mathrm{Mat}_n(k)$.

(b) $\det(f_A) = 0$.

Exercise 8

Für $a \in \mathbb{R}$ definiere

$$\begin{aligned} f_a \colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (ax + y, x + ay) \end{aligned}$$

(a) f_a sind $\mathbb{R}$-linear für alle $a \in bR$.

(b) Bestimme $\det(f_a)$ in Abhängigkeit von a

(c) Wieso impliziert b) daß $\operatorname{im} f_a = \mathbb{R}^2$ für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ ist.

(d) Bestimme Basen von $\operatorname{im} f_1$ und $\operatorname{im} f_{-1}$

Exercise 9

Sei $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(k)$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{falls}\, i = j \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Determinante der Matrix A.

Exercise 10

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 7 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$$

(a) Berechnen Sie das Charakteristische Polynom von A.

(b) Finden Sie die Eigenwerte von A .

(c) Berechnen Sie die Eigenräume von A.

Exercise 11

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechenen Sie $\det(A)$

(b) Ist A invertierbar ? Falls ja, berechnen Sie ihre Inverse.

Exercise 12

Beweisen Sie daß Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerte linear unabhängig sind.